ΒΑΣΕΙΣ GROBNER

19/12/2016

Ασκ Βρείτε μια ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες $I = \langle x^{3n}y-5 \mid n\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}\rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{R}[x,y]$ ως προς οποιαδήποτε διάταξη όρων. (ΘΕΜΑ) [redacted]

Απόδειξη

$I=\langle \underbrace{x^3y-5}_{=g_1}, \underbrace{x^6y-5}_{=g_2}, x^9y-5, x^{12}y-5,\dots,x^{3n}y-5,\dots\rangle$

lex $x>y$

$g_1=x^3y-5\in I$ $\quad (x^6y-5)-x^3(x^3y-5)\in I$

$g_2=x^6y-5\in I$

$S(g_1,g_2)=\frac{x^6y}{x^6y}(x^6y-5)-\frac{x^6y}{x^3y}(x^3y-5)=5x^3-5\in I$

Άρα το $x^3-1\in I$. Ονομάζω $f=x^3-1=g_3$

$S(g_2,g_3)\in I$

$S(g_2,g_3)=\frac{x^3y}{x^3y}(x^3y-5)-\frac{x^3y}{x^3}(x^3-1)=y-5$

Άρα το $y-5\in I$

Ισχυρίζομαι ότι το $g_3=x^3-1$ και το $y-5$ παράγουν το ιδεώδες. Δηλαδή $I\supseteq\langle x^3-1,y-5\rangle$
Αφού $y-5\in I$ και $x^3-1\in I$. Άρα αρκεί νδο $\langle x^3-1,y-5\rangle\supseteq I$. Παίρνω τυχαίο:

$x^{15}y-5=\boxed{}(y-5)+\boxed{}(x^3-1)$

$x^{3n}y-5=\boxed{}(y-5)+\boxed{}(x^3-1)$

$x^{3n}y-5=x^{3n}(y-5)+5(x^{3n}-1)$

$=x^{3n}(y-5)+5(x^3-1)(1+x^3+x^{2\cdot 3}+\dots+x^{3(n-1)})$

$=\boxed{x^{3n}}(y-5)+\boxed{5(1+x^3+x^6+\dots+x^{3(n-1)})}(x^3-1)$

Άρα $I=\langle x^3-1,y-5\rangle$

Επομένως ψάχνω να βρω ανάγωγη βάση Gröbner για το $I=\langle y-5,x^3-1\rangle$ με lex $x>y$:

$S(y-5,x^3-1)=\frac{yx^3}{y}(y-5)-\frac{yx^3}{x^3}(x^3-1)=-5x^3+y\xrightarrow{x^3-1}$

$-5x^3+y-\frac{5x^3}{x^3}(x^3-1)=y-5\xrightarrow{y-5}0$

$ΕΚΠ(y, x^3) = yx^3$

$μκδ(y, x^3) = 1 \Rightarrow S(y-5, x^3-1) \xrightarrow{\{y-5, x^3-1\}} 0$

Άρα $y-5, x^3-1$ είναι βάση Gröbner του I

$Lt(I) = \langle y, x^3 \rangle$ Άρα είναι ελαχιστική.

Είναι και ανάγωγη βάση Gröbner

γιατί $lm(y-5) = y \nmid x^3$ και $y \nmid 1$ και

$lm(x^3-1) = x^3 \nmid y$ και $x^3 \nmid 5$.

Επομένως ανάγωγη βάση Gröbner του I

είναι $y-5, x^3-1$.

Ασκ. Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες $I = \langle x^n y^{2n} z^n - 1 \mid n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \rangle$ του $K[x,y,z]$ ως προς οποιαδήποτε μονωνυμική διάταξη. Δείξτε ότι η ανάγωγη βάση Gröbner του I δεν εξαρτάται από τη διάταξη. (ΘΕΜΑ)

Απόδειξη

$I = \langle xy^2z - 1, x^2y^4z^2 - 1, x^3y^6z^3 - 1, \ldots, x^n y^{2n} z^n - 1, \ldots$

Ισχυριζόμαστε ότι $I = \langle xy^2z - 1 \rangle$.

Αρκεί νδο $I \subseteq \langle xy^2z - 1 \rangle$ και $\langle xy^2z - 1 \rangle \subseteq I$.

Το $\langle xy^2z - 1 \rangle \subseteq I$ είναι προφανές

αφού $xy^2z - 1 \in I$.

Το $\langle xy^2z - 1 \rangle \supseteq I$:

$$x^n y^{2n} z^n - 1 = (xy^2z - 1)\left((xy^2z)^{n-1} + (xy^2z)^{n-2} + \ldots + (xy^2z) + 1\right)$$

Δηλ. $x^n y^{2n} z^n - 1 = \boxed{(xy^2z)^{n-1} + (xy^2z)^{n-2} + \ldots + (xy^2z) + 1}(xy^2z - 1)$

Άρα $I \subseteq \langle xy^2z - 1 \rangle$

Επομένως $I = \langle xy^2z - 1 \rangle$

$xy^2z - 1$ ανάγωγη βάση Gröbner

$Lt(I) = \langle xy^2z \rangle$

Ασκ. Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες $I = < y^{2n}x - 3 \mid n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, \} >$ του $\mathbb{R}[x, y]$.

~

Ασκ. Έστω G μια ελαχιστική βάση Gröbner του ιδεώδους $I = < x_1^n, x_2^{n-1}, \ldots, x_i^{n-i+1}, \ldots, x_{n-1}^2, x_n >$ του δακτυλίου $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ που είναι εφοδιασμένος με κάποια μονωνυμική διάταξη. Βρείτε πόσα στοιχεία έχει η G και αποδείξτε ότι οποιαδήποτε G περιέχει ένα συγκεκριμένο μονώνυμο. Ποιο είναι αυτό; Βρείτε την ανάγωγη βάση Gröbner του I και μια ελαχιστική που να μην είναι ανάγωγη.

Απόδειξη

$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ $\quad x_1 > x_2 > \ldots > x_n$

$I = < x_1, x_2, \ldots, x_n >$

$$\underset{i \neq j}{S(x_i, x_j)} = \frac{x_i x_j}{\cancel{x_i}} \cancel{x_i} - \frac{x_i x_j}{x_j} x_j = 0$$

Άρα $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ είναι βάση Gröbner.

Εφόσον κανένα x_i δεν διαιρεί κανένα x_j έχουμε ότι είναι ανάγωγη βάση Gröbner. Αφού είναι ανάγωγη είναι και ελαχιστική και επειδή είναι ελαχιστική το πλήθος των στοιχείων της είναι ανεξάρτητο από την ελαχιστική βάση, άρα η (κάθε) ελαχιστική έχει n στοιχεία.

Τυχαία $G = \{x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_n\}$

~

Ασκ. Βρείτε μία ανάγωγη βάση Gröbner για το ιδεώδες $I = < xy + z, xy^2 + z > \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$ με βαθμωτή λεξικογραφική $x > y > z$.

$g_1 = xy+z,\ g_2 = xy^2+z,\ g_3 = yz-z$
$g_4 = xz+z^2$

$S(g_1,g_2), S(g_1,g_3), S(g_2,g_3)$
$S(g_1,g_4), S(g_2,g_4), S(g_3,g_4)$

Απόδειξη

$g_1 = xy+z,\ g_2 = xy^2+z$

$S(g_1,g_2) = \frac{xy^2}{xy}(xy+z) - \frac{xy^2}{xy^2}(xy^2+z) =$

$= yz - z \xrightarrow{g_1,g_2} yz-z$. Άρα $g_3 = yz-z$

$S(g_1,g_2)=0$

$S(g_1,g_3) = \frac{xyz}{xy}(xy+z) - \frac{xyz}{yz}(yz-z)$

$= z^2 + xz = xz+z^2 \xrightarrow{g_1,g_2,g_3} xz+z^2$

Άρα $g_4 = xz+z^2$.

$S(g_1,g_2)=0$

$S(g_1,g_3)=0$

$S(g_2,g_3) = \frac{xy^2z}{xy^2}(xy^2+z) - \frac{xy^2z}{yz}(yz-z) =$

$= z^2+xyz = xyz+z^2 \xrightarrow{xy+z}$

$\to xyz+z^2 - \frac{xyz}{xy}(xy+z) = z^2-z^2=0$

$S(g_1,g_4) = \frac{xyz}{xy}(xy+z) - \frac{xyz}{xz}(xz+z^2) =$

$= z^2 - yz^2 = -yz^2+z^2 \xrightarrow{yz-z}$

$\to -yz^2+z^2 - \frac{-yz^2}{yz}(yz-z) = z^2-z^2=0$

$S(g_2,g_4) = \frac{xy^2z}{xy^2}(xy^2+z) - \frac{xy^2z}{xz}(xz+z^2) =$

$= z^2 - y^2z^2 = -y^2z^2+z^2 \xrightarrow{yz-z}$

$\to -y^2z^2+z^2 - \frac{-y^2z^2}{yz}(yz-z) = z^2-yz^2 =$

$= -yz^2+z^2 \xrightarrow{yz-z} -yz^2+z^2 - \frac{-yz^2}{yz}(yz-z) =$

$= z^2-z^2=0$

$S(g_3,g_4) = \frac{xyz}{yz}(yz-z) - \frac{xyz}{xz}(xz+z^2) =$

$= -xz - yz^2 = -yz^2 - xz \xrightarrow{yz-z}$

$\to -yz^2-xz - \frac{-yz^2}{yz}(yz-z) = -xz - z^2 \xrightarrow{xz+z^2} \dots = 0$

Άρα βάση Gröbner: $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$\{xy+z, \cancel{xy^2+z}, yz-z, xz+z^2\}$

γιατί $xy \mid xy^2$

Άρα $\{xy+z, yz-z, xz+z^2\}$ είναι ελαχιστική.

Άρα, επειδή κανένα αρχικό μονώνυμο δεν διαιρεί κανέναν όρο, είναι ανάγωγη βάση Gröbner: $\{xy+z, yz-z, xz+z^2\}$

Παράδειγμα (Mora)

n+3 στοιχεία

3 γεννήτορες

Έστω $\mathbb{Q}[x,y,z,w]$, degrevlex $x>y>z>w$

$I_n = \langle x^{n+1} - yz^{n-1}w, \; xy^{n-1} - z^n, \; x^n z - y^n w \rangle$

Ανάγωγη βάση Gröbner: $G = \{x^{n+1} - yz^{n-1}w, \; xy^{n-1} - z^n, \; x^n z - y^n w, \; x^{n-1} z^{n+1} w, \; x^{n-2} z^{2n+1} - y^{3n-2} w, \; \ldots, \; x^{n-j} z^{jn+1} - y^{(j+1)n-j} w, \; \ldots, \; z^{n^2+1} - y^{n^2} w\}$

Ακέραιος Προγραμματισμός

Να βρεθούν λύσεις ενός συστήματος

n αγνώστους

m εξισώσεις

$$a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1$$
$$a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n = b_2$$
$$a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n = b_m$$

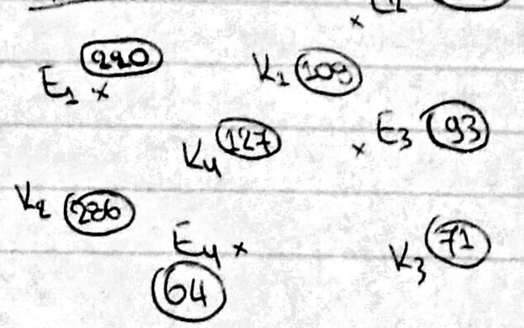
Απαιτώ $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}_0^n$

και να ελαχιστοποιούν μια συνάρτηση κόστους:

$$c(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_n\lambda_n$$

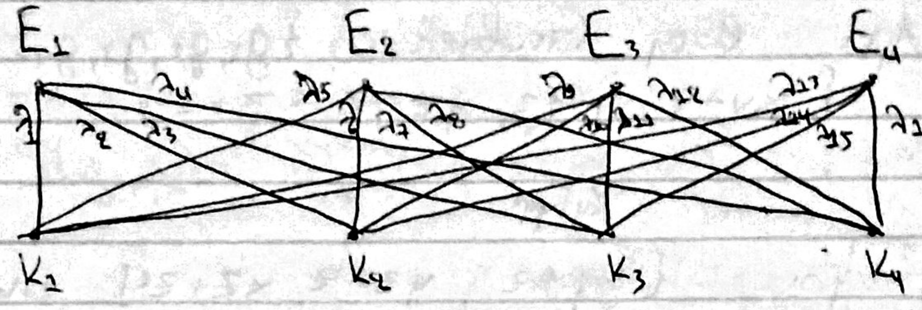
Θα δουλεύαμε στο χώρο $\mathbb{R}[t_1, \ldots, t_m, x_1, \ldots, x_n]$

Πρόβλημα



E_i: εργοστάσια αυτοκινήτων

K_i: καταστήματα πώλησης



λ_1 το πλήθος των αυτοκινήτων K_1 που θα μεταφερθούν από το E_1 στο K_1.

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = 220$$
$$\lambda_5+\lambda_6+\lambda_7+\lambda_8 = 215$$
$$\lambda_9+\lambda_{10}+\lambda_{11}+\lambda_{12} = 93$$
$$\lambda_{13}+\lambda_{14}+\lambda_{15}+\lambda_{16} = 64$$

$$\lambda_1+\lambda_5+\lambda_9+\lambda_{13} = 108$$
$$\lambda_2+\lambda_6+\lambda_{10}+\lambda_{14} = 286$$
$$\lambda_3+\lambda_7+\lambda_{11}+\lambda_{15} = 71$$
$$\lambda_4+\lambda_8+\lambda_{12}+\lambda_{16} = 127$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{16}) \in \mathbb{N}_0^{16}$

min $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_{16}\lambda_{16}$